Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра «Естественные и математические науки»

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ

Методические указания по дисциплине «Теоретическая механика»
для самостоятельной работы студентов направления

23.03.01 «Нефтегазовое дело»

очной и очно-заочной форм обучения

Электронное издание комбинированного распространения

Одобрено
редакционно-издательским советом
ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А.

Энгельс 2024 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 2
Глоссарий 3
Основные теоретические результаты 6
Литература 13

ВВЕДЕНИЕ

Аналитическая механика представляет собой раздел теоретической механики, в котором изучаются как движения, так и равновесия произвольных механических систем. При этом методы решения задач являются общими. Так, уравнения движения приобретают единую структуру, которая не зависит от вида системы.

В методических указаниях приведены определения основных понятий аналитической механики. Эти определения представлены в глоссарии в том порядке, который необходим для освоения материала, и проиллюстрированы примерами. Указания также содержат краткое изложение теоретических результатов, на которых основана аналитическая механика.

ГЛОССАРИЙ

1. *Связи* – ограничения, которые накладываются на координаты и скорости материальных точек механической системы. Математическое описание связей (*уравнения связей*) может содержать равенства (*двусторонние* или *удерживающие связи*) и неравенства (*односторонние связи*). Вид уравнений позволяет классифицировать связи.
Голономные связи можно описать уравнениями, не содержащими производные от координат точек.
Неголономные связи описываются уравнениями, из которых нельзя за счет интегрирования исключить производные по времени от координат.
Стационарные (*склерономные*) связи описываются уравнениями, не содержащими явно время. Если время входит явно в описание связи, то такая связь называется *подвижной* (*реономной*).

Пример 1. Пусть материальная точка M движется в плоскости, находясь в каждый момент времени на заданном расстоянии $r=a(t)$ относительно некоторой неподвижной точки O. Введем прямоугольную систему координат Oxy. Тогда на координаты точки M будет налагаться ограничение

$$x^2 + y^2 = a^2(t). \qquad (1)$$

Уравнение (1) задает голономную и реономную связь.

2. Обобщенные координаты – независимые величины, значения которых однозначно определяют состояние механической системы. Необходимое для описания системы число обобщенных координат называют *числом степеней свободы* механической системы.

Пример 2. Рассмотрим движение материальной точки из примера 1. Наличие единственной связи (1) уменьшает число степеней свободы на единицу – от двух (при свободном движении) до одной. Положение точки в любой момент времени можно теперь задать, используя только одну обобщенную координату. Обобщенной координатой не обязательно должна быть какая-то из исходных декартовых координат. Например, выбрав начальное направление, от которого отсчитывается угол q до радиус-вектора точки, мы можем выразить прямоугольные координаты

$$x = a(t)\cos q, \quad y = a(t)\sin q.$$

При заданной длине радиус-вектора $r=a(t)$ мы, зная единственную обобщенную координату $q(t)$, мы можем определить положение точки.

3. Возможные (виртуальные) перемещения
Возможное перемещение материальной точки – бесконечно малое мысленное перемещение, которое допускается в рассматриваемый момент

времени наложенными на точку связями. Возможное перемещение $\delta\boldsymbol{r}$ можно описать как изохронную *вариацию* радиус-вектора, то есть как полный дифференциал при фиксированном времени t. В декартовой системе координат

$$\delta\boldsymbol{r} = (\delta x)\boldsymbol{i} + (\delta y)\boldsymbol{j} + (\delta z)\boldsymbol{k}\,, \qquad (1)$$

где $\delta x, \delta y, \delta z$ есть изохронные вариации координат точки. Напомним, что действительное перемещение $d\boldsymbol{r} = (dx)\boldsymbol{i} + (dy)\boldsymbol{j} + (dz)\boldsymbol{k}$ является полным дифференциалом радиус-вектора при изменении времени, как независимой переменной, на величину dt. В силу этого имеет место равенство

$$d\boldsymbol{r} = \left(\dot{x}(t)\boldsymbol{i} + \dot{y}(t)\boldsymbol{j} + \dot{z}(t)\boldsymbol{k}\right)dt\,.$$

Возможное перемещение механической системы – любая совокупность возможных перемещений точек системы. При наличии связей не все возможные перемещения точек являются независимыми. В аналитической механике установлено, что число независимых возможных перемещений равно числу степеней свободы системы.

Пример 3. Определить отношение между возможными перемещениями δS_A точки A кривошипа OA и δS_C ползуна, если длины OB=AB. [2]

Для кривошипа OA на рис.1 получаем, что δS_B=0,5·δS_A и перемещение δS_B направлено по горизонтали вправо. Для стержня BC устанавливаем, что δS_B=δS_C. Окончательно, δS_A : δS_C=2.

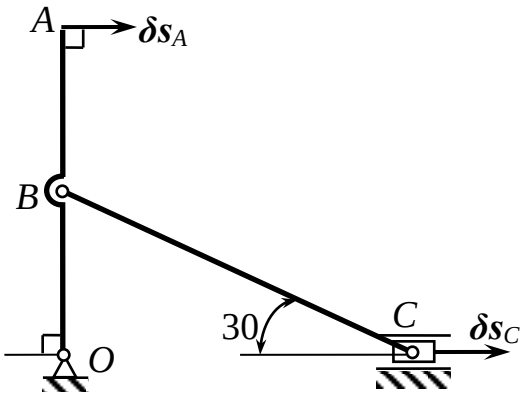

Рис.1

4. Виртуальная работа силы

Элементарная работа силы $\boldsymbol{F}$ *на возможном перемещении* $\delta\boldsymbol{r}$ *ее точки приложения* равна (по определению)

$$\delta A = \boldsymbol{F}\delta\boldsymbol{r} = F_x \cdot \delta x + F_y \cdot \delta y + F_z \cdot \delta z\,. \qquad (2)$$

Аналогично определяется *элементарная работа сил* $\boldsymbol{F}_k$ *на возможном перемещении* $\delta\boldsymbol{r}_k$ *механической системы N точек*

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \delta\boldsymbol{r}_k\,. \qquad (3)$$

Для системы, на которую наложены связи, полезно различать в выражении (3) активные силы (условимся сохранить для них обозначение $\boldsymbol{F}_k$) и реакции связей (далее будут обозначаться $\boldsymbol{R}_k$). Тогда

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{R}_k)\delta\boldsymbol{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \delta\boldsymbol{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{R}_k \delta\boldsymbol{r}_k\,.$$

Связи, наложенные на систему, называются *идеальными*, если

$$\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{R}_k \delta \boldsymbol{r}_k = 0 \tag{4}$$

для любого возможного перемещения системы. Перечислим некоторые распространенные ситуации, которые могут быть смоделированы с использованием понятия идеальных связей:

1) связи между точками абсолютно твердого тела;
2) связи при движении точки по абсолютно гладкой линии или абсолютно гладкой поверхности;
3) гибкие нерастяжимые связи между точками системы (нити, тросы, канаты и тому подобное);
4) неподвижное закрепление точки системы.

5. Обобщенные силы

Рассмотрим механическую систему N точек, на которую наложено l голономных связей. Как уже обсуждалось в пункте 2 глоссария, система в этом случае имеет n=3N-l степеней свободы. Для описания состояния системы достаточно использовать соответствующее число обобщенных координат $q_1,\ldots,q_n$. Таким образом, для точек системы

$$\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k(q_1,\ldots,q_n,t), \quad k = 1,\ldots N \tag{5}$$

Для системы со стационарными связями время не входит явно в правые части выражений (5). Тогда для возможных перемещений точек системы справедливы равенства

$$\delta \boldsymbol{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i, \quad k = 1,\ldots,N\,. \tag{6}$$

Используем далее представления (6) в выражении (3) для элементарной работы. Получаем

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \right) = \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i\,.$$

Таким образом

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i\,. \tag{6}$$

В формулу (6) для элементарной работы входят *обобщенные силы*

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}, \quad i = 1,\ldots,n\,. \tag{7}$$

Следует заметить, что выражения (7) определяют обобщенные силы как скалярные величины. Физическая размерность этих величин может быть разной. При этом произведения $\delta A_i = Q_i \delta q_i$ должны иметь размерность механической работы, то есть $[Q_i \delta q_i]$=[Дж].

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Используем понятия, определенные в глоссарии, для обсуждения теоретических результатов, которые легли в основу аналитической механики. В рамках данных методических указаний некоторые из этих результатов приводятся без доказательства. Полное изложение материала можно найти в классических учебниках [1,3].

1. Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)

Для того чтобы система материальных точек, на которую наложены идеальные стационарные удерживающие связи, находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы работа всех активных сил на любом возможном перемещении системы, а также скорости всех точек в рассматриваемый момент времени, равнялись нулю:

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \delta \boldsymbol{r}_k = 0, \\ \boldsymbol{v}_k(t_0) = 0 \quad k = 1,\ldots,n\end{gathered} \tag{8}$$

В дополнение к данной формулировке сделаем замечания, которые расширяют возможности применения принципа Лагранжа.

1) При наличии неидеальных связей реакции этих связей (например, силы трения) относят к активным силам.

2) Если требуется определить реакцию идеальной связи, то эту связь в расчетной схеме отбрасывают, а соответствующую реакцию рассматривают как активную силу.

3) Вместо возможных перемещений $\delta \boldsymbol{r}_k$ можно рассматривать пропорциональные им возможные скорости.

Принцип Лагранжа можно сформулировать в терминах обобщенных координат и обобщенных сил. Действительно, условие (8) означает что

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \delta \boldsymbol{r}_k = 0 .$$

Тогда в силу (6)

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = 0 . \tag{9}$$

Равенство (9) в силу независимости вариаций δq_i равносильно системе условий

$$Q_i = 0, \quad i = 1,\ldots,n . \tag{10}$$

Таким образом, для равновесия механической системы, подчиненной голономным стационарным идеальным двусторонним связям, в момент, когда скорости всех точек системы равны нулю, необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы были равны нулю.

Если в данный момент времени скорости точек системы не равны нулю, то эти скорости остаются неизменными, до тех пор, пока в последующие моменты времени выполняются условия (10).

Пример 4. Определить момент M пары сил, который необходимо приложить к барабану 2 радиуса r=20 см для равномерного подъема груза 1 весом 200 Н [2].

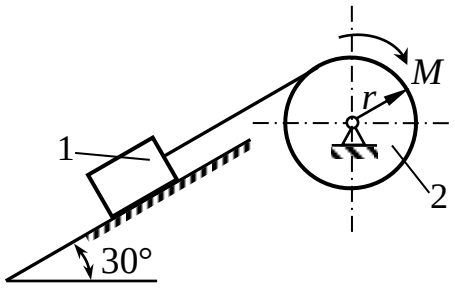

Рис.2.

При отсутствии трения на наклонной поверхности получаем систему с идеальными связями (рис.2). Сообщим системе возможное перемещение, мысленно повернув барабан 2 на угол $\delta\varphi$ в сторону действия момента M. При этом груз 1 получит перемещение δs вдоль наклонной поверхности, равное $\delta s = r\delta\varphi$. Кроме пары сил, приложенной к барабану, активной силой выступает вес груза P. Так как движение равномерное, можно перейти к скоростям и представить

$$\delta s = t\delta v, \quad \delta\varphi = t\delta\omega.$$

Принцип Лагранжа позволяет записать равенство

$$(-P\sin\alpha)\delta v + M\delta\omega = 0\,.$$

Здесь α – угол наклона поверхности, по которой скользит груз 1. Так как $\delta v = r\delta\omega$, то далее получим

$$(-rP\sin\alpha + M)\delta\omega = 0\,.$$

Последнее равенство должно выполняться для любой вариации угловой скорости $\delta\omega$. Следовательно,

$$-rP\sin\alpha + M = 0$$

$$M = rP\sin\alpha = 0{,}20\cdot 200\cdot 0{,}5 = 20 \text{ Нм}.$$

В рассмотренном примере в силу равенства $\delta s = r\delta\varphi$ система имеет одну степень свободы. Если принять $q_1 = \varphi$, то единственная обобщенная сила выражается как $Q_1 = M - rP\sin\alpha$. Тогда искомый момент пары сил определятся из условия $Q_1 = 0$.

2. Общее уравнение динамики

Используем принцип возможных перемещений вместе с известным методом кинетостатики – принципом Даламбера [1,3]. Для системы, удовлетворяющей условиям принципа возможных перемещений, такой подход приводит к уравнению

$$\sum_{k=1}^{N}(\boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{\Phi}_k)\delta\boldsymbol{r}_k = 0. \qquad (11)$$

Формула (11) содержит выражение для элементарной возможной работы с учетом сил инерции

$$\boldsymbol{\Phi}_k = -m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k, \quad k = 1,\ldots,n. \tag{12}$$

Уравнение (11) называют *общим уравнением динамики* для системы с идеальными связями или объединенным принципом Даламбера-Лагранжа. Выполнив для формулы (11) преобразования с учетом (5) и (6), получим

$$\sum_{i=1}^{n}(Q_i + Q_i^{\Phi})\delta q_i = 0. \tag{13}$$

Как и ранее, обобщенные силы в уравнениях (13) определяются равенствами

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Наличие в формуле (11) сил инерции приводит к появлению в формуле (13) *обобщенных сил инерции*

$$Q_i^{\Phi} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\Phi}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{14}$$

Как уже отмечалось, вариации обобщенных координат δq_i есть величины независимые. Выполнение условия (13) возможно тогда и только тогда, когда

$$Q_i + Q_i^{\Phi} = 0, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{15}$$

Условия (15) можно толковать как выражение принципа Даламбера в терминах обобщенных сил.

Пример 5. Грузы 1 и 2, массы которых $m_2=2m_1$, прикреплены к тросу, переброшенному через блок радиуса r. Пренебрегая массой блока, определить ускорение грузов. [2]

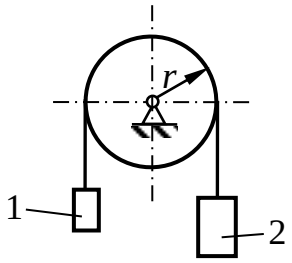

Рис.3.

Система на рис.3 имеет одну степень свободы. Выберем за обобщенную координату q угол поворота барабана φ. Тогда можно выразить перемещение грузов как $s=r\varphi$. Указанное перемещение груз 1 совершает с ускорением a вверх. Груз 2 при этом опускается на s вниз с таким же ускорением. На основании (13) получим

$$(-m_1 g - m_1 a + m_2 g - m_2 a) r\delta\varphi = 0$$

при произвольной вариации угла поворота $\delta\varphi$. Тогда

$$-m_1 g - m_1 a + m_2 g - m_2 a = 0$$

$$a = g \cdot \frac{(m_2 : m_1) - 1}{(m_2 : m_1) + 1} = 9{,}81 \cdot \frac{2-1}{2+1} = 3{,}27 \text{ м/с}^2.$$

3. Уравнения Лагранжа второго рода

Как показано в [1,3], для механической системы с голономными идеальными двусторонними связями общее уравнение динамики можно привести к виду

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i\right)\delta q_i=0. \qquad (16)$$

В формуле (16) через T обозначена кинетическая энергия системы, представленная как функция обобщенных координат и обобщенных скоростей. Таким образом, уравнение (16) есть общее уравнение динамики в обобщенных координатах.

В силу независимости вариаций обобщенных координат δq_i из уравнения (16) следует система уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i=0, \quad i=1,\ldots,n. \qquad (17)$$

Формулы (17) называют *уравнениями Лагранжа второго рода*. Они позволяют составить систему уравнений движения механической системы в обобщенных координатах. Каждое из уравнений (17) будет обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка относительно функций $q_i(t)$.

Рассмотрим важный частный случай *консервативной механической системы*, когда все силы, действующие на систему, являются потенциальными. Тогда можно ввести силовую функцию $U=U(q_1,\ldots,q_n)$ и выразить обобщенные силы в виде

$$Q_i=\frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad i=1,\ldots,n. \qquad (18)$$

Используем (18) в уравнениях Лагранжа (16).
Так как

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\equiv 0, \quad i=1,\ldots,n,$$

то

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial (T+U)}{\partial \dot{q}_i}, \quad i=1,\ldots,n.$$

Формулы (17) теперь можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T+U)}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial (T+U)}{\partial q_i}=0, \quad i=1,\ldots,n.$$

Введем в рассмотрение *функцию Лагранжа*

$$L=T+U. \qquad (19)$$

Тогда уравнения Лагранжа (17) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1,...,n. \tag{20}$$

Величину, определяемую выражением (19) называют также *кинетическим потенциалом* [2]. Заметим, что функцию Лагранжа можно представить в виде $L=T–П$, где $П$ – потенциальная энергия системы.

Пример 6. Материальная точка M массой m=1 кг поднимается вертикально. Определить скорость v подъема в момент времени, когда кинетический потенциал точки равен нулю и она находится на высоте h=6 м, если при h=0 потенциальная энергия $П_0$=0. [2]

Для нашего случая кинетический потенциал можно представить в виде

$$L = m\frac{v^2}{2} - mgh = m\left(\frac{v^2}{2} - gh\right).$$

Тогда по условию задачи

$$\frac{v^2}{2} - 6g = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{12g} \approx 10{,}8 \text{ м/с}.$$

Пример 7. Кинетический потенциал системы, выраженный через ее обобщенную координату y и обобщенную скорость $\dot{y}$, равен $L = \dot{y}^2 + 2y$. Определить ускорение $\ddot{y}$. [2]

Используем уравнения Лагранжа второго рода (20). Приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}(2\dot{y}) - 2 = 0$$

Далее

$$2\ddot{y} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = 1.$$

Пример 8. Кинетический потенциал механической системы определяется выражением $L = 14\dot{\varphi}^2 + 2\varphi$, где φ – обобщенная координата, рад. Вычислить обобщенную скорость $\dot{\varphi}$ через 2 с после начала движения, если при t=0 $\dot{\varphi} = 2$ рад/с. [2]

Используем уравнения Лагранжа второго рода (20). Приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}(28\dot{\varphi}) - 2 = 0.$$

Далее

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt}=\frac{1}{14} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}(t)-\dot{\varphi}(0)=\frac{t}{14}\Big|_0^t \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}(t)=\frac{t}{14}+2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\varphi}(2)=15/7\approx 2{,}14 \text{ рад/с}.$$

Пример 9. Кинетический потенциал механической системы определяется выражением $L=16\dot{x}^2+20x$. Определить значение обобщенной координаты x в момент времени t=3 с, если в начале движения $x(0)=0,\ \dot{x}(0)=2$ м/с. [2]

Используем уравнения Лагранжа второго рода (20). Приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}(32\dot{x})-20=0.$$

Далее получаем

$$\ddot{x}=5/8.$$

То есть данное движение механической системы происходит с постоянным ускорением a=0,625 м/с^2. Тогда

$$x(t)=x(0)+\dot{x}(0)t+\frac{at^2}{2}.$$

Окончательно получаем

$$x(3)=0+2\cdot 3+\frac{0{,}625\cdot 9}{2}=8{,}8125\approx 8{,}81\text{ м}.$$

Пример 10. Механическая система представлена схемой на рис 4. Масса тел m_1=m_2=6 кг. Определить ускорение тела 1, если коэффициент трения скольжения между горизонтальной поверхностью и телом 1 равен f=0,2. [2]

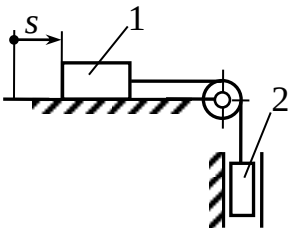

Рис.4.

Данная механическая система имеет одну степень свободы. Выберем в качестве обобщенной координаты расстояние s.

Так как при движении на тело 1 действует сила трения, то система не является консервативной. Используем уравнение Лагранжа второго рода в форме (17). Кинетическая энергия системы тел 1,2 будет представлена в виде

$$T=\frac{(m_1+m_2)}{2}\dot{s}^2. \tag{21}$$

Рассмотрим выражение для элементарной работы δA системы на возможном перемещении δs. С учетом направления перемещения и направлений сил, действующих на систему, можно утверждать, что в

выражение для элементарной работы войдут только слагаемые за счет силы трения, действующей на тело 1, и силы тяжести, действующей на тело 2. Действительно,

$$\delta A = (-m_1 gf)\delta s + (m_2 g)\delta s = (-m_1 gf + m_2 g)\delta s .$$

Последнее равенство позволяет определить обобщенную силу

$$Q = (-m_1 f + m_2)g . \qquad (22)$$

Используя выражения (21),(22) в уравнении (17), получим

$$\frac{d}{dt}\left((m_1 + m_2)\dot{s}\right) - (-m_1 f + m_2)g = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{s} = \frac{-m_1 f + m_2}{m_1 + m_2} g .$$

Ускорения тел 1,2 равны $a_1 = a_2 = \ddot{s}$. С учетом условия m_1=m_2 имеем

$$a_1 = \frac{1-f}{2} g = \frac{1-0{,}2}{2} \cdot 9{,}81 = 3{,}92 \text{ м/с}^2 .$$

4. Канонические уравнения

Наряду с обобщенными координатами и обобщенными скоростями в аналитической механике используют *обобщенные импульсы*

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1,\ldots,n . \qquad (21)$$

Далее мы будем обсуждать консервативные системы, для которых

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1,\ldots,n . \qquad (22)$$

Обобщенные импульсы входят в выражение для *функции Гамильтона*

$$H = -L + \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i . \qquad (23)$$

Заметим, что для консервативной системы формула (23) выражает полную механическую энергию, представленную функцией обобщенных координат и импульсов.

Функцию Гамильтона используют для вывода *канонических уравнений движения*. Канонические уравнения представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно обобщенных координат и обобщенных импульсов. Получить такую систему можно на основе следующего теоретического результата [1,3]

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1,\ldots,n . \qquad (24)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: Учебное пособие для ВО: в двух томах / Н.В.Бутенин, Я.Л.Лунц, Д.Р.Меркин. – СПб.: Издательство «Лань», 2020.
2. Кепе О.Э. Сборник коротких задач по теоретической механике: Учебное пособие / О.Э.Кепе, О.П.Грапис, А.Я.Виба. – СПб.: Издательство «Лань», 2020.
3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник. – СПб.: Издательство «Лань», 2011.

Все права на размножение и распространение в любой форме
остаются за разработчиком.
Нелегальное копирование и использование данного продукта запрещено.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ

Методические указания

Авторы-составители: Серебряков Андрей Владимирович

Нагар Юлия Николаевна

413100, Россия, Саратовская область, г. Энгельс, пл. Свободы, 17.
ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А.

Тел: +7 (8453) 95-35-53
E-mail: eti@techn.sstu.ru
http://techn.sstu.ru

Регистрационный номер 38

© ЭТИ (филиал) СГТУ, 2021